Studio di funzione: Y=f(x) algebrica, razionale, di 3 grado

Analisi di funzioni intere e fratte

Autore: Prof.ssa AGUELI Maria Assunta

Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Indice

Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Algebrica, intera, razionale,

Data la funzione

$$y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$$

Effettuarne lo studio completo:

1) **Classificarla**
2) **Individuarne il *Dominio* (o *Insieme di Definizione*)**
3) **Calcolarne i *limiti* agli estremi dell'insieme di definizione**
4) **Individuare le equazioni degli eventuali *asintoti***
5) **Individuarne la posizione rispetto agli assi cartesiani (*studio del segno*)**
6) **Calcolarne la *derivata prima***
7) **Individuare gli *intervalli di crescenza* e/o *decrescenza***
8) **Calcolare le coordinate degli eventuali punti di :**
   massimo* e/o *minimo relativo* , *flesso a tangente orizzontale
9) **Effettuare il *grafico***

Punto 1)

Si tratta di una **funzione algebrica** (perché la x non compare come argomento né di una funzione goniometrica, né logaritmica, né ad esponente), **intera** (perché la x non compare al denominatore), **razionale** (perché la x non compare sotto il segno di radice), di terzo grado.

Punto 2)

Una funzione algebrica, intera razionale esiste per qualsiasi valore della x, per cui il Dominio è **tutto R**, ossia **CE :** $\forall\ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}$ *OPPURE* $\boldsymbol{x} \in (-\infty; +\infty\ )$

Punto 3)

I Limiti da calcolare sono:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)\ ; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Nel caso in esame si avrà:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 - 15x + 4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2 - 15x + 4) = +\infty$$

Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Punto 4)

Una f(x) algebrica intera non ha asintoti, comunque esaminiamo i casi

4a) ricerca dell' asintoto verticale

Ricordando che una retta del tipo x=c è A.V. per una funzione algebrica se

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

Dove c è un valore che annulla il denominatore. Poiché la funzione in esame non ha denominatori, **non esistono asintoti verticali.**

4b) ricerca dell' asintoto orizzontale

Ricordando che una retta del tipo y=l è A.O. per una funzione se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

poiché nel nostro caso si ha

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 6x^2 - 15x + 4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 6x^2 - 15x + 4) = +\infty$$

Ciò basta per affermare che **non esiste l'asintoto orizzontale**

4c) ricerca asintoto obliquo

Poiché non esiste l'A.Orizzontale, potrebbe esistere quello obliquo, di equazione y =mx+q, con

m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ **dove m é un numero finito diverso da zero**

q =$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$ **dove q é un numero finito**

nel nostro caso si avrà:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^3 - 6x^2 - 15x + 4)}{x} = \infty$$

Perché il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore.

Ne segue che, poiché m = ∞, **l'asintoto obliquo non esiste.**

Prof.[ssa] Agueli Maria Assunta

Punto 5

5a) intersezione della curva con l'asse delle Y, di equazione x =0 $\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4 \\ x = 0 \end{cases}$ da cui ne segue $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ P(0;4)

5b) intersezione della curva con l'asse delle X, di equazione y=0 e studio del segno (f(x)≥ 0).

Poiché si tratta di una equazione di terzo grado, tralasceremo questo punto, salvo ritornarvi in seguito.

Punti 6, 7, 8

Ricordiamo che:

- La derivata prima di una funzione in un suo punto, $\boldsymbol{D[f(x)] = y'}$, rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in quel punto.

Ne segue che, se la $\boldsymbol{y'(x)}$ **è positiva**, la retta tangente è inclinata nel verso delle $\boldsymbol{x}$ **crescenti**, se la $\boldsymbol{y'(x)}$ **è negativa**, la retta tangente è inclinata nel verso delle $\boldsymbol{x}$ **decrescenti**, mentre se $\boldsymbol{y'(x) = 0}$ **la retta tangente è parallela all'asse delle x.**

- Dicesi Massimo relativo o locale – *picco* - di $f(x)$ il punto di quota più alto del suo intorno
- Dicesi Minimo relativo o locale– *abisso* - di $f(x)$ il punto di quota più basso del suo intorno.
- Dicesi flesso un punto in cui la curva cambia la concavità

I PASSAGGI PER INDIVIDUARE QUANTO RICHIESTO SONO I SEGUENTI

1) **Calcolo della derivata prima y'**
2) **Y'>0 per individuare gli intervalli di crescenza**
3) **Y'<0 per individuare gli intervalli di decrescenza**
4) **Y'=0 per individuare la "x" degli eventuali Max e/o min relativi e/o flesso orizzontale**

Ricordiamo le ***REGOLE DI DERIVAZIONE***

$D[ax^n] = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ $\qquad$ $D[cost] = 0$

Svolgiamo $\quad y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4 \quad \rightarrow \quad y' = 3x^2 - 12x - 15$

Da cui si ha $\quad y' = 3x^2 - 4x - 5) \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 5$

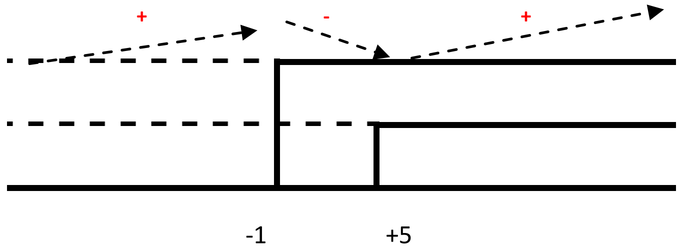
$x_1 = 5;\ x_2 = -1$ sono i valori che annullano la $D(f(x)) = y'$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

$f'(x) > 0 \; per \quad x < -1; \;\; x > 5$

$f'(x) = 0 \; per \quad x = -1; \;\; x = 5$

$f'(x) < 0 \; per \quad -1 < x < 5$



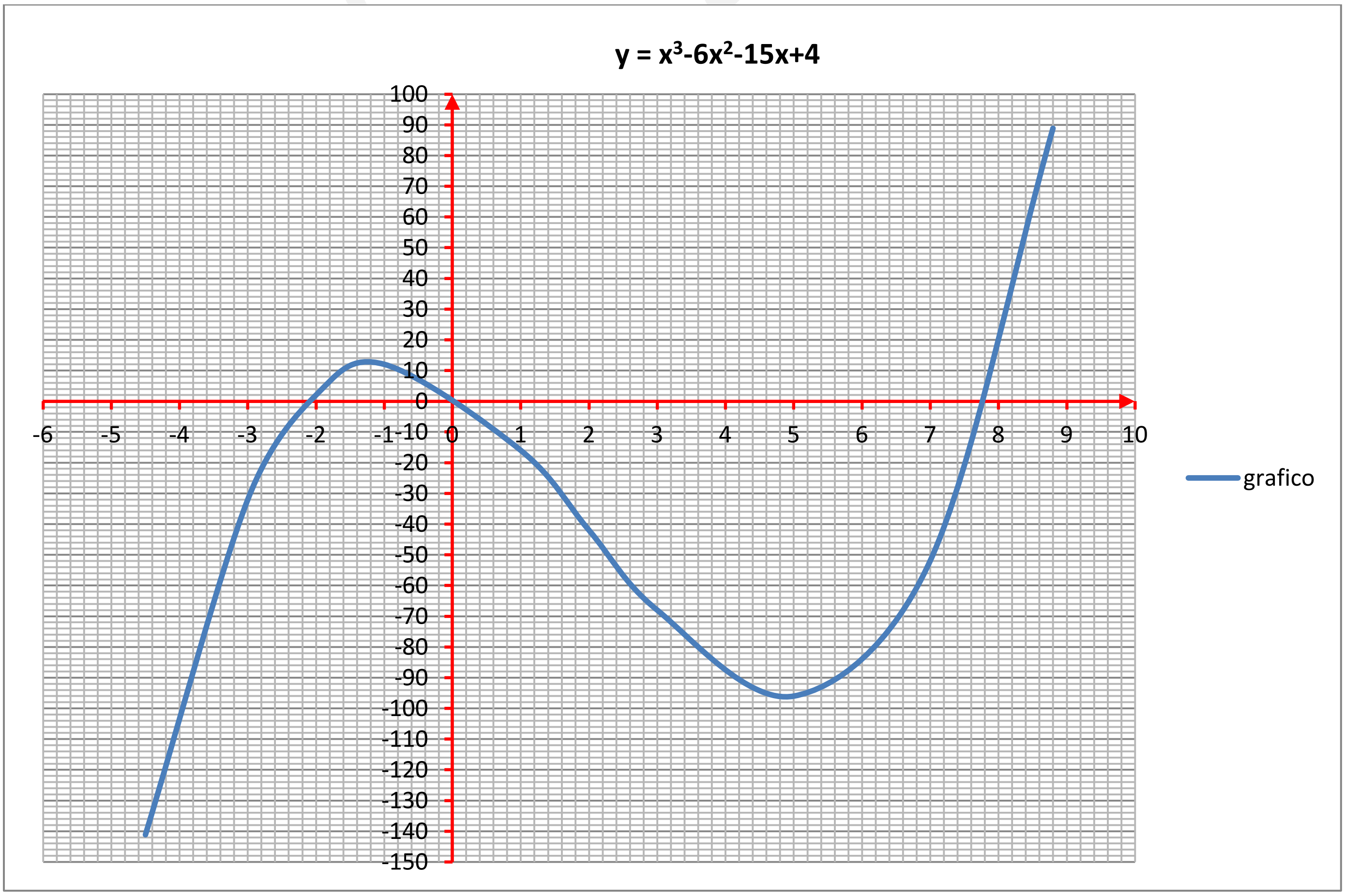
La $f(x)$ ha continuato a crescere fino al punto $x = -1$ (escluso), dopo tale punto ha iniziato a decrescere. Il punto di ascissa $x = -1$ è un PICCO della $f(x)$ (Massimo relativo) perché è il punto di quota più alto del suo intorno.

La $f(x)$, dopo $x = -1$, ha iniziato a scendere sino a $x = 5$ (escluso), dopodiché ha ripreso a salire. Il punto di ascissa $x = 5$ è un ABISSO per la $f(x)$, minimo relativo.

Per essere considerati Min e Max relativi debbono essere punti validi della $f(x)$, ossia accettati dal CE. Nel nostro esempio **CE** coincide con **R** quindi possiamo considerarli punti massimi e minimi e trovarne la coordinata Y, con il sistema

Max $\begin{cases} \boldsymbol{x = -1} \\ \boldsymbol{y} = -1 - 6 + 15 + 4 = \boldsymbol{12} \end{cases}$ Picco (-1; 12)

min $\begin{cases} \boldsymbol{x = 5} \\ \boldsymbol{y} = 125 - 150 - 75 + 4 = \boldsymbol{-104} \end{cases}$ Abisso (5; -104)



Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Algebrica, fratta, razionale